VÝPOČET INVERZNÍCH MATIC POMOCÍ ALGEBRAICKÝCH DOPLŇKŮ

Zadaná matice **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

32. věta – inverzní matice pomocí determinantů
Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je regulární čtvercová matice řádu n. Potom inverzní matici k matici **A** lze zapsat

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{11} & \mathrm{D}_{21} & \dots & \mathrm{D}_{\mathrm{n}1} \\ \mathrm{D}_{21} & \mathrm{D}_{22} & \dots & \mathrm{D}_{\mathrm{n}2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_{1\mathrm{n}} & \mathrm{D}_{2\mathrm{n}} & \dots & \mathrm{D}_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathrm{D}_{ij})^{\mathrm{T}},$$

kde D_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} matice **A** pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$.

1) Spočítáme determinant zadané matice **A** (tučně vyznačena) Sarrusovým pravidlem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -4 - 1 + 2 - 4 + 2 - 1 = \underline{\underline{-4}}$$

2) Potřebujeme algebraické doplňky submatic[1] pro dosazení do vzorce zmíněného výše. Algebraické doplňky zjistíme na základě determinantů submatic:

$$\text{algebraický doplněk} = (-1)^{i+j} \cdot \text{ determinant submatice}$$

$$\text{kde } i = \text{sloupec}, \ j = \text{řádek}$$

[1]Matice vytvořená z dané matice vynecháním některých sloupců a řádků.

Tabulka 1. Výpočet determinantů submatic a algebraických doplňků

Zvýrazněný prvek (v rámečku)	Submatice	Výpočet determinantu submatice	algebraický doplněk
$D_{11} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$-4 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = -4 + 2 = \underline{\underline{-2}}$	$(-1)^{1+1} \cdot (-2) = \underline{\underline{-2}}$
$D_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$	$(-1)^{1+2} \cdot (-1) = \underline{\underline{1}}$
$D_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{-1} \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$1 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1 = -1 + 4 = \underline{\underline{3}}$	$(-1)^{1+3} \cdot 3 = \underline{\underline{3}}$
$D_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$	$(-1)^{2+1} \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$
$D_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \boxed{-4} & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$	$(-1)^{2+2} \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$
$D_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & \boxed{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = \underline{\underline{-2}}$	$(-1)^{2+3} \cdot (-2) = \underline{\underline{2}}$
$D_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) = 2 - 4 = \underline{\underline{-2}}$	$(-1)^{3+1} \cdot (-2) = \underline{\underline{-2}}$
$D_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$	$(-1)^{3+2} \cdot 3 = \underline{\underline{-3}}$
$D_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	$1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -4 - 1 = \underline{\underline{-5}}$	$(-1)^{3+3} \cdot (-5) = \underline{\underline{-5}}$

Vzhledem k tomu, že musíme používat matici algebraických doplňků transponovanou, budeme nyní chápat značení transponovaně:

$$\mathrm{D}_{\text{sloupec, řádek}}$$

a dosadíme do matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}}}$$

Výsledná matice je inverzní k zadané matici $\mathbf{A}$.

Správnost výsledku můžeme ověřit zkouškou:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$