VĚTY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Skripta **Matematické metody pro statistiku a operační výzkum** (Nešetřilová, H., Šařecová, P., 2009).

1. věta

Nechť $\mathrm{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ je množina vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ a nechť

$$\mathrm{L(M)} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot x_i ;\, \forall i x_i \in \mathrm{M}, c_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pak lineární obal L(M) množiny M je podprostor $\mathbf{V}$.

2. věta

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbf{V}$, $k \geq 2$, $k \in \mathrm{N}$. Vektory $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li možné alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinací ostatních vektorů.

3. věta

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z $\mathbf{V}$ a nechť vektor $y \in \mathbf{V}$ je lineární kombinací vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_k$,

$$y = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_k \cdot x_k.$$

Pak koeficienty, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ této lineární kombinace jsou určeny jednoznačně.

4. věta

Podmnožina M vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je množinou generátorů $\mathbf{V}$ právě tehdy, když každý vektor $y \in \mathbf{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinací vektorů z M.

5. věta

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou generátory vektorovéo prostoru $\mathbf{V}$ a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou vektory, které vznikly z vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_k$ některou z následujících **ekvivalentních úprav:**

(1) změnou pořadí vektorů ve skupině;
(2) násobením libovolného vektoru nenulovým reálným číslem;
(3) tak, že k libovolnému vektoru přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů;
(4) vynecháním vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů (specielně lze vynechat nulový vektor, není-li to jediný vektor, který skupinu obsahuje);
(5) přidáním vektoru, který je lineární kombinací vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Pak vektory $y_1, y_2, \dots, y_m$ generují stejný vektorový prostor $\mathbf{V}$ jako vektory $x_1, x_2, \dots, x_k$.

6. věta – **Steinitzova věta**

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_m$ jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru $\mathbf{V}$; nechť $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou další vektory z $\mathbf{V}$ takové, že každý vektor x_i je lineární kombinací vektorů $y_1, y_2, \dots, y_n$, tj. $x_i \in \mathrm{L}(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Potom platí

$$m \le n.$$

7. věta

Libovolné dvě báze (konečně generovaného) vektorového prostoru $\mathbf{V}$ mají stejný počet vektorů.

8. věta

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor dimenze n a nechť $x_1, x_2, \dots, x_m$ jsou vektory z $\mathbf{V}$. Je-li $m > n$, pak jsou vektory $x_1, x_2, \dots, x_m$ lineárně závislé.

9. věta

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor dimenze n, pak každá skupina n lineárně nezávislých vektorů $x_1, x_2, \dots, x_n$ z $\mathbf{V}$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

10. věta

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor dimenze n, $x_1, x_2, \dots, x_m$ lineárně nezávislé vektory z $\mathbf{V}$. Je-li $m < n$, pak lze vektory $x_1, x_2, \dots, x_m$ doplnit na bázi $\mathbf{V}$; to znamená, že existují vektory $x_{m+1}, \dots, x_n \in \mathbf{V}$ takové, že $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{\mathrm{n}}$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

11. věta

Nechť $\mathbf{S}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Potom platí

$$\dim\ \mathbf{S} \le \dim \mathbf{V},$$

přičemž rovnost $m \le n$ ve Steinitzově větě platí právě když $\mathbf{S} = \mathbf{V}$.

12. věta

Nechť x, y, z jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ libovolné reálné číslo. Pak platí:

(1) $x \cdot y = y \cdot x$
(2) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
(3) $r \cdot (x \cdot y) = (r \cdot x) \cdot y$
(4) $x \cdot x \ge 0$, přitom $x \cdot x = 0$ právě tehdy, je-li $x = 0$.

13. věta

Skupina nenulových vzájemně ortogonálních vektorů $x_1, x_2, \dots, x_k$ je vždy lineárně nezávislá.

14. věta

Každý netriviální podprostor $\mathbf{S}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ má ortogonální bázi.

15. věta

Nechť $\mathbf{S}$ je podmnožina $\mathbb{R}^n$. Pak platí

$$(\S^{\perp})^{\perp} = \mathrm{L(S)}.$$

Je-li $\mathbf{S}$ podprostor $\mathbb{R}^n$, lze s použitím Gramm-Schmidtovi ortogonalizující konstrukce dokázat následující důležitou větu, kterou použijeme při řešení soustav lineárních rovnic.

16. věta

Nechť $\mathbf{S}$ je podprostor $\mathbb{R}^n$. Potom platí

$$\dim \mathbf{S}^{\perp} = \dim \mathbb{R}^n - \dim \mathbf{S}$$

17. věta

Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jsou matice typu $(m, n), r, s \in \mathbb{R}$. Pak platí

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
(2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,
(3) $r \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r \cdot \mathbf{A} + r \cdot \mathbf{B}$,
(4) $(r + s) \cdot \mathbf{A} = r \cdot \mathbf{A} + s \cdot \mathbf{A}$,
(5) $r \cdot (s\mathbf{A}) = (r \cdot s) \cdot \mathbf{A}$.

18. věta

Množina $\mathbb{R}_{m \cdot n}$ všech matic typu (m, n) spolu s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem tvoří vektorový prostor dimenze $m \cdot n$.

19. věta

Je-li matice $\mathbf{T}$ typu (m, n) trojúhelníková matice, pak

$$h(\mathbf{T}) = m.$$

20. věta

Nechť $\mathbf{A^T}$ je transponovaná matice k matici $\mathbf{A}$, pak platí

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A^T}).$$

21. věta

Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých a nechť $\mathbf{A}$ je matice této soustavy. Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je řešením této soustavy právě když $x \ \in \mathbb{R}\ (\mathbf{A})^{\perp}$ v $\mathbb{R}^n$.

22. věta – **Frobeniova věta**

Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě když hodnost matice soustavy $\mathbf{A}$ a hodnost rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ jsou stejné.

23. věta

Každé řešení x nehomogenní soustavy lineárních rovnic lze zapsat jako součet

$$x = y + z$$

kde y je libovolné (pevné) řešení nehomogenní soustavy a z je nějaké řešení homogenní soustavy se stejnou maticí $\mathbf{A}$.

Poznámka: z této věty vyplývá, že množinu M všech řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic lze symbolicky zapsat jako

$$\mathrm{M} = y + \mathbb{R}(\mathbf{A})^{\perp} = \{y + z; z \in \mathbb{R}(\mathbf{A})^{\perp}\}.$$

24. věta

Jsou-li $\mathbf{A}$**,** $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ matice a $r \in \mathbb{R}$ libovolné reálné číslo, pak platí

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, (asociativní zákon)
(2) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, (distributivní zákon)
(3) $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$, (distributivní zákon)
(4) $r \cdot (\mathbf{AB}) = (r\mathbf{A}) \cdot \ \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (r\mathbf{B})$.

mají-li uvedené výrazy smysl.

25. věta

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pak inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ existuje právě tehdy, je-li $\mathbf{A}$ regulární.

26. věta

Nechť $\mathbf{A}$**,** $\mathbf{B}$ jsou regulární matice stejného řádu. Potom matice nechť $\mathbf{AB}$ je také regulární a platí

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

Je-li $r \in \mathbb{R}$ nenulové reálné číslo, pak

$$(r\mathbf{A}^{-1}) = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

27. věta

Nechť $\mathbf{A} \cdot x = b$ je soustava n lineárních rovnic o n neznámých. Je-li matice soustavy $\mathbf{A}$ regulární, pak má soustava jediné řešení

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

28. věta

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je trojúhelníková matice řádu n. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

29. věta

Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu n. Pak platí:

(1)

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A},$$

(2) jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ přehozením dvou řádků (resp. sloupců), pak

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A},$$

(3) jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynásobením jednoho řádku (resp. sloupce) reálným číslem $r \in \mathbb{R}$, pak

$$\det \mathbf{B} = r \cdot \det \mathbf{A},$$

(4) jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ tak, že k jednomu řádku matice $\mathbf{A}$ byla přičtena lineární kombinace ostatních řádků, pak

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A},$$

(5) jestliže také matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jsou čtvercové matice řádu n takové, že k-tý řádek matice $\mathbf{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$, je součtem k-tých řádků matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a ostatní řádky mají všechny tři matice stejné, pak

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B},$$

(6) jestliže $\mathbf{B}$ je čtvercová matice řádu n, pak

$$\det (\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B},$$

(7) jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, pak

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

30. věta

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$.

31. věta

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Pak pro každé přirozené číslo $i,\ 1 \leq i \leq n$, platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathrm{D}_{ij},$$

a pro každé přirozené číslo $j,\ 1 \leq j \leq n$, platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathrm{D}_{ij},$$

kde D_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$.

32. věta – **Inverzní matice pomocí determinantů**

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je regulární čtvercová matice řádu n. Potom inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ lze zapsat

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{11} & \mathrm{D}_{21} & \dots & \mathrm{D}_{\mathrm{n}1} \\ \mathrm{D}_{21} & \mathrm{D}_{22} & \dots & \mathrm{D}_{\mathrm{n}2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_{1\mathrm{n}} & \mathrm{D}_{2\mathrm{n}} & \dots & \mathrm{D}_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathrm{D}_{ij})^{\mathrm{T}},$$

kde D_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$.

33. věta – **Cramerovo pravidlo**

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Je-li matice soustavy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ regulární, pak má soustava právě jedno řešení, pro které platí

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \text{pro } i = 1, 2, \dots, n,$$

kde $\mathbf{A}_i$ je matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy $(b_1,\ b_2, \dots,\ b_n)^{\mathrm{T}}$.