

# První derivace a lokální extrémy

Robert Mařík

6. března 2007

# Obsah

Extrémy funkce	$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$	3
Extrémy funkce	$y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$	19
Extrémy funkce	$y = \frac{x}{(1+x)^3}$	33
Extrémy funkce	$y = \frac{x^3}{x-1}$	47
Extrémy funkce	$y = \frac{3x+1}{x^3}$	63
Extrémy funkce	$y = x^2 e^{-x}$	80
Extrémy funkce	$y = \frac{x^2}{\ln x}$	93

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$  a určete intervaly monotonosti.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$  a určete intervaly monotonosti.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

- Určíme definiční obor funkce.
- Nejsou žádná omezení, je tedy funkce definovaná (a spojitá) na  $\mathbb{R}$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)'$$

Vypočteme derivaci. Užijeme vzorec pro derivaci součtu a násobku.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 + 0\end{aligned}$$

Vypočítáme jednotlivé derivace podle vzorce  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' - 2(x^2)' + (x)' + (1)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 + 0 \\ &= 3x^2 - 4x + 1\end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

- Chceme zjistit, kde funkce roste a kde klesá.
- K tomu stačí zjistit, kde je kladná a kde je záporná derivace.
- Musíme tedy nejprve hledat body, kde derivace může změnit znaménko. Body nespojitosti derivace nemá a soustředíme se na body, kde je derivace nulová.



Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

Řešíme kvadraticou rovnicí. Řešení rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  je

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{4 \pm 2}{6} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{4 \pm 2}{6}$$

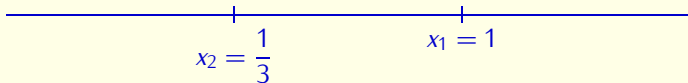
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Určíme řešení. Rovnice má dva reálné různé kořeny.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

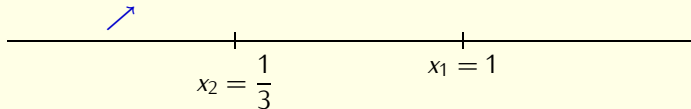
$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



- Vyznačíme stacionární body na reálnou osu.
- Body nespojitosti nejsou, nevynášíme tedy už nic dalšího.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

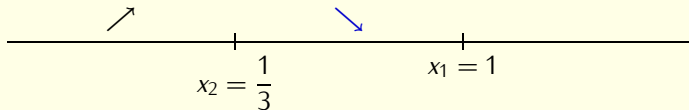
$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



- Zvolíme číslo z prvního intervalu  $(-\infty, \frac{1}{3})$ . Uvažujme například číslo  $\xi_1 = 0$ .
- Vypočteme  $y'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$ . Funkce je rostoucí na intervalu  $(-\infty, \frac{1}{3})$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



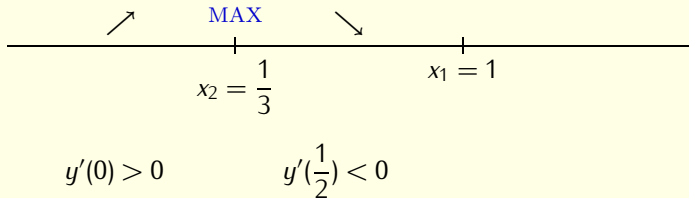
$$y'(0) > 0$$

$$y'(\frac{1}{2}) < 0$$

Podobně, protože platí  $y'(\frac{1}{2}) = 3\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} < 0$ , je funkce klesající na intervalu  $(\frac{1}{3}, 1)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

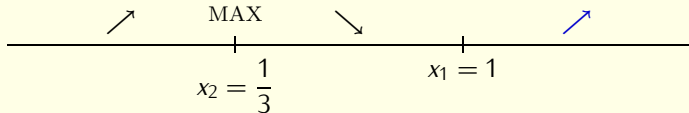
$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



Monotonie se mění v bodě  $x_2$ . Funkce má v tomto bodě lokální maximum.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



$$y'(0) > 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

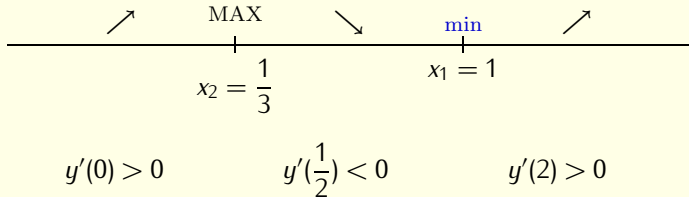
$$y'(2) > 0$$

Platí  $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$



Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

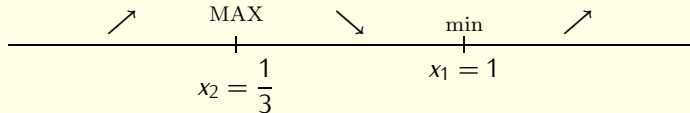
$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



Monotonie se mění v bodě  $x_1 = 1$  a je zde lokální extrém – lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}$ ;  $y' = 3x^2 - 4x + 1$ ; Stac. body:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$



Hotovo!

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$  a určete intervaly monotonicity.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

Určíme definiční obor funkce. Jediné omezení pochází ze jmenovatele zlomku.

$$1 - x \neq 0,$$

t.j.

$$x \neq 1.$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$y' = 4 \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

- Derivujeme složenou funkci. Vnější složka je mocninná funkce, kterou derivujeme podle pravidla  $(x^4)' = 4x^3$ .

- Vnitřní složka je zlomek, který derivujeme podle pravidla

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= 4 \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= 4 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Upravíme druhý zlomek.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= 4 \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^3 \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= 4 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5} \end{aligned}$$

Ještě upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5};$$

- Našli jsme derivaci  $y'$ .
- Omezení na  $x$  plynoucí z  $y'$  jsou stejná, jako byla u původní funkce. Derivace je tedy definována na množině  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .



Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5};$$

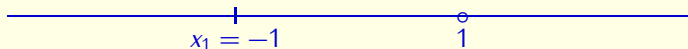
Stacionární bod:  $x_1 = -1$

- Hledáme body, kde  $y' = 0$ .
- Podíl je nula, pokud je čitatel nula.  
Jediný stacionární bod je tedy řešením rovnice

$$(1+x)^3 = 0.$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

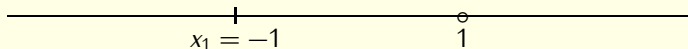
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



- Vyznačíme stacionární bod a bod nespojitosti na osu.
- Osa je rozdělena na tři podintervaly. Na každém podintervalu má funkce ve všech bodech tentýž typ monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

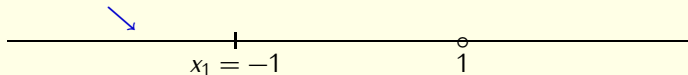
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



- Zkoumáme typ monotonie na intervalu  $(-\infty, -1)$
- Vybereme libovolný testovací bod z tohoto intervalu.
- Buď  $\xi_1 = -2$  takový testovací bod.
- Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



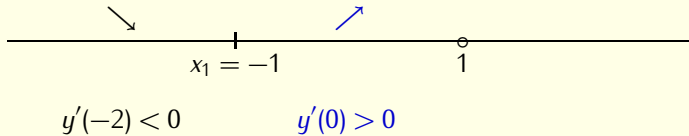
$$y'(-2) < 0$$

$$y'(-2) = 8 \frac{(1-2)^3}{(1-(-2))^5} = 8 \frac{-1}{3^5} < 0.$$

Derivace je záporná a funkce klesá v bodě  $\zeta_2 = -2$  a na intervalu  $(-\infty, -1)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



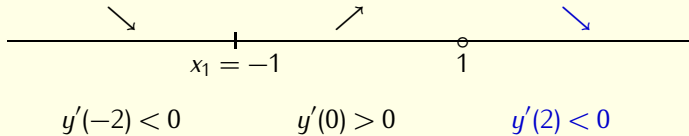
Podobně naložíme s bodem  $\xi_2 = 0$ , který náleží do intervalu  $(-1, 1)$  a splňuje

$$y'(0) = 8 \frac{1}{1^5} > 0.$$

Funkce je rostoucí v bodě  $\xi_2 = 0$  a na intervalu  $(-1, 1)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



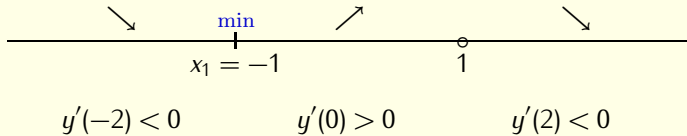
Konečně, bod  $\xi_3 = 2$  patří do intervalu  $(1, \infty)$  a splňuje

$$y'(2) = 8 \frac{(1+2)^3}{(1-2)^5} < 0.$$

Funkce je klesající v bodě  $\xi_3 = 2$  a na intervalu  $(1, \infty)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ .

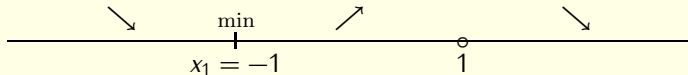
$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  $y' = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}$ ;  $x_1 = -1$



- Funkce má lokální minimum v  $x = -1$ .
- Funkce nemá žádný další lokální extrém. Zejména, funkce nemá extrém v bodě  $x = 1$ , protože  $1 \notin Dom(f)$ .

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = 8 \frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}; \quad x_1 = -1$$



Hotovo!



Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$  a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

Určíme definiční obor. Jediné omezení plyne ze jmenovatele zlomku:

$$1 + x \neq 0,$$

t.j.

$$x \neq -1.$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$y' = \frac{1(1+x)^3 - x \cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2}$$

- Derivujeme funkci podle pravidla pro derivaci podílu.
- Při derivování jmenovatele  $(1+x)^3$  neumocňujeme, ale použijeme řetězové pravidlo  $((1+x)^3)' = 3(1+x)^2(1+x)' = 3(1+x)^2$ . Tento trik umožní v dalším kroku vytknout a zkrátit.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1(1+x)^3 - x \cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2} \\ &= \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6} \end{aligned}$$

Upravíme čítec druhého zlomku. Vytkneme výraz  $(1+x)^2$  před závorku v čitateli.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1(1+x)^3 - x \cdot 3(1+x)^2}{((1+x)^3)^2} \\ &= \frac{(1+x)^2(1+x-3x)}{(1+x)^6} \\ &= \frac{1-2x}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

Zkrátíme  $(1+x)^2$  a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4};$$

- Máme derivaci  $y'$ .
- Definiční obor této derivace se shoduje s definičním oborem původní funkce, t.j.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- Budeme zkoumat znaménko derivace.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4};$$

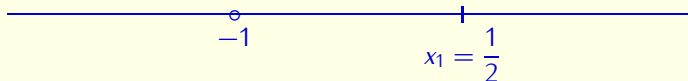
Stacionární bod:  $x_1 = \frac{1}{2}$

- Hledáme nejprve body, kde platí  $y' = 0$ .
- Zlomek je nulový, pokud je nulový čítenel.  
Jediný stacionární bod je tedy řešením rovnice

$$1 - 2x = 0.$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

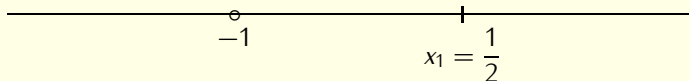


- Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti na reálnou osu.
- Osa je rozdělena na tři podintervaly. Funkce zachovává na každém intervalu typ monotonie.



Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

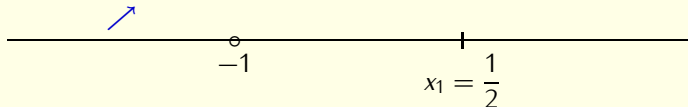
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



- Zkoumejme interval  $(-\infty, -1)$
- Zvolíme v tomto intervalu testovací bod.
- Nechť  $\xi_1 = -2$  je testovací bod.
- Určíme derivaci v tomto bodě.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



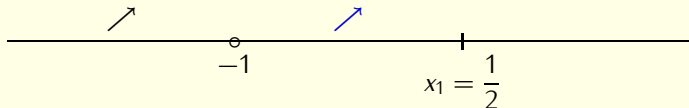
$$y'(-2) > 0$$

$$y'(-2) = \frac{1 - 2(-2)}{(1 - 2)^6} = \frac{5}{1} > 0.$$

Derivace je kladná a funkce roste v bodě  $\xi_2 = -2$  a na intervalu  $(-\infty, -1)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



$$y'(-2) > 0$$

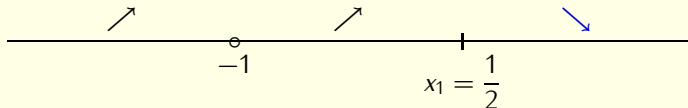
$$y'(0) > 0$$

Podobně, bod  $\xi_2 = 0$  leží v intervalu  $(-1, \frac{1}{2})$  a splňuje

$y'(0) = \frac{1}{1} > 0$ . Funkce je rostoucí v bodě  $\xi_2 = 0$  a na intervalu  $(-1, \frac{1}{2})$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



$$y'(-2) > 0$$

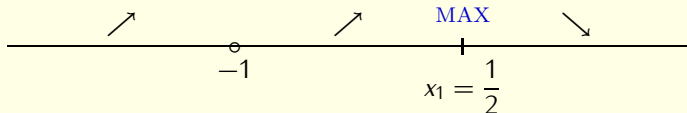
$$y'(0) > 0$$

$$y'(2) < 0$$

Konečně, platí  $y'(2) = \frac{1-4}{3^4} < 0$ . Funkce klesá v bodě  $\xi_3 = 2$  a na intervalu  $(\frac{1}{2}, \infty)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



$$y'(-2) > 0$$

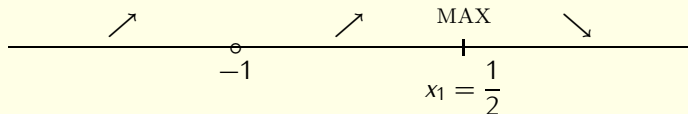
$$y'(0) > 0$$

$$y'(2) < 0$$

- Funkce má lokální maximum v bodě  $x = \frac{1}{2}$ .
- Funkce nemá žádný další lokální extrém.

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad y' = \frac{1-2x}{(1+x)^4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}$$



Hotovo!

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$  a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

Určíme definiční obor. Nesmí být nula ve jmenovateli.



Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$y' = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2}$$

Derivujeme podíl podle vzorce

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Doderivujeme

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Upravíme. Zde je jedno jestli nejprve roznásobíme nebo vytkneme, protože roznásobujeme jenom mocninou  $x$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - x^3(1-0)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Rozložíme na součin.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

- Našli jsme derivaci. Zajímá nás, kdy je tato derivace kladná a kdy záporná.
- Předně: derivace není definovaná pro  $x = 1$ .
- Dále řešíme rovnici  $y' = 0$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

Zlomek je nulový právě tehdy, když je nulový čítenel zlomku.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

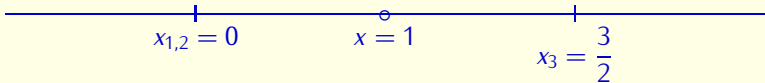
$$x_3 = \frac{3}{2}$$

Součin je nula jestliže je alespoň jeden ze součinitelů roven nule.

Řešíme tedy rovnice  $x^2 = 0$  a  $2x - 3 = 0$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

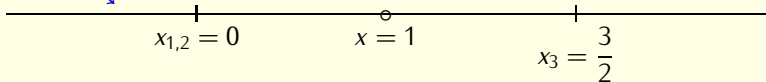


- Máme stacionární body a body, kde derivace není definována (a je nespojitá).
- Jedině v těchto bodech může derivace měnit znaménko. Vynešeme tyto body na reálnou osu.



Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



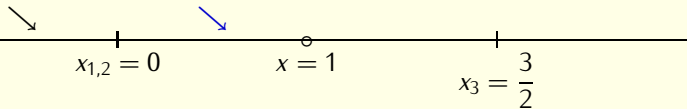
$$y'(-1) < 0$$

Počítáme derivace v libovolných bodech, po jednom z každého podintervalu.

$$y'(-1) = \frac{(-1)^2(-2-3)}{\text{něco kladného}} = \frac{-5}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

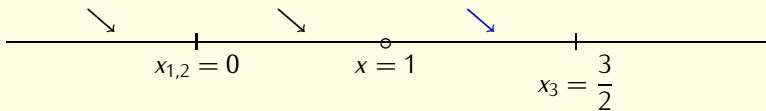


$$y'(-1) < 0 \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}(1-3)}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

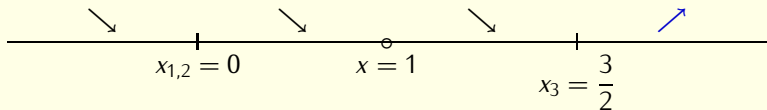


$$y'(-1) < 0 \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad y'(1,2) < 0$$

$$y'(1,2) = \frac{(1,2)^2(2,4-3)}{\text{něco kladného}} < 0$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



$$y'(-1) < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

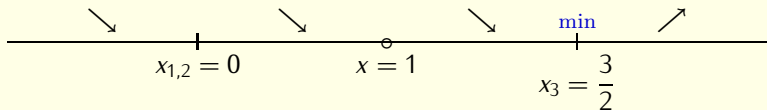
$$y'(1,2) < 0$$

$$y'(2) > 0$$

$$y'(2) = \frac{(2)^2(4-3)}{\text{něco kladného}} > 0$$

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



$$y'(-1) < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

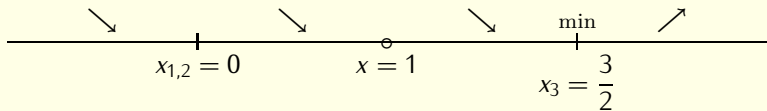
$$y'(1,2) < 0$$

$$y'(2) > 0$$

Pouze v bodě  $x = \frac{3}{2}$  se mění charakter monotonie. V tomto bodě je lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^3}{x-1}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}; \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{3}{2}$$



$$y'(-1) < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$y'(1,2) < 0$$

$$y'(2) > 0$$

Hotovo.

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$  a určete intervaly monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

Určíme definiční obor funkce. Jediné omezení plyne ze jmenovatele zlomku. Tedy  $x \neq 0$ .



Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$y' = \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2}$$

Derivujeme podíl podle vzorce

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

kde  $u = 3x + 1$  a  $v = x^3$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$y' = \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6}$$

- Hledáme nejprve body, kde je derivace nulová.
- Abychom měli později snadné a pohodlné, co nejvíce upravíme a rozložíme na součin.
- Vytkneme tedy faktor  $3x^2$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6} \\ &= 3 \frac{x - 3x - 1}{x^4} \end{aligned}$$

- Zkrátíme faktorem  $x^2$ .
- Konstantní násobek 3 napíšeme před zlomek.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6} \\ &= 3 \frac{x - 3x - 1}{x^4} = 3 \frac{-2x - 1}{x^4} \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^3 - (3x + 1)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(x - (3x + 1))}{x^6} \\ &= 3 \frac{x - 3x - 1}{x^4} = 3 \frac{-2x - 1}{x^4} = -3 \frac{2x + 1}{x^4} \end{aligned}$$

Vytkneme záporné znaménko.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4};$$

- Definiční obor derivace je shodný s definičním oborem původní funkce.
- Hledáme nejprve stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

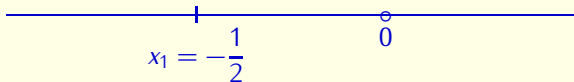
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4};$$

$$\text{Stacionární bod: } x_1 = -\frac{1}{2}.$$

- Podíl je nulový, pokud je nulový čítatel.
- $2x + 1 = 0$  pro  $x = -\frac{1}{2}$ . Bod  $x_1 = -\frac{1}{2}$  je jediným stacionárním bodem zadané funkce.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3\frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

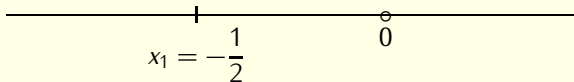


- Vyznačíme bod nespojitosti a stacionární bod na osu  $x$ .
- Osa  $x$  je rozdělena na podintervaly. Na každém podintervalu je zachován tentýž typ monotonie pro všechna  $x$  náležející do tohoto podintervalu.



Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

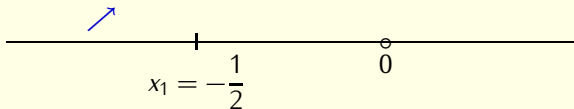
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



Zvolíme testovací bod z intervalu  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ . Nechť je to bod  $\xi_1 = -1$ . Vypočteme **derivaci** v bodě  $\xi_1$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

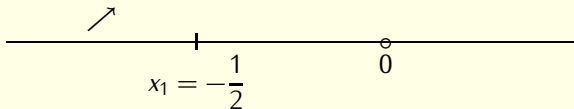


$$y'(-1) = -3 \frac{-2 + 1}{(-1)^4} > 0$$

Funkce je tedy rostoucí v bodě  $\xi_1 = -1$  a totéž platí pro všechny body z intervalu  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

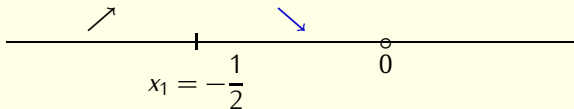
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



Zvolíme bod  $\xi_2 = -\frac{1}{4}$  z intervalu  $(-\frac{1}{2}, 0)$ . Určíme **derivaci** v tomto bodě.

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

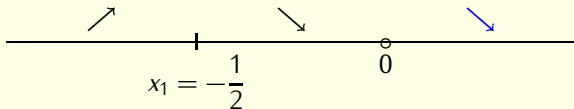


$$y'(-1/4) = -3 \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\text{kladný výraz}} < 0$$

a funkce je tedy klesající v bodě  $\xi_2 = -1/4$  a i na celém intervalu  $(-\frac{1}{2}, 0)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



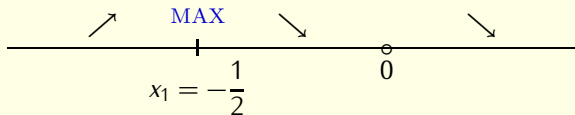
Podobně, pro  $\xi_3 = 1$  dostáváme

$$y'(1) = -3 \frac{2 + 1}{\text{kladný výraz}} < 0$$

a funkce je klesající v bodě  $\xi_3 = 1$  a na intervalu  $(0, \infty)$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

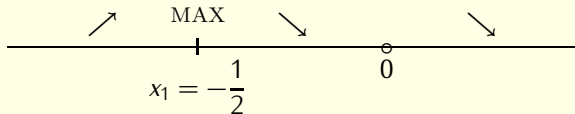
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



- Funkce je spojitá na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Funkce má lokální maximum v bodě  $x = -\frac{1}{2}$  a nemá žádný další lokální extrém.

Najděte lokální extrémů funkce  $y = \frac{3x + 1}{x^3}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad y'(x) = -3 \frac{2x + 1}{x^4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$



- Problém je vyřešen!
- Všechno co se týká monotonie plyne z nakresleného schématu.

Najděte lokální extrémů funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.



Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

Na proměnnou  $x$  nemní třeba naložit žádné omezující podmínky a proto je definičním oborem celá množina  $\mathbb{R}$ .

Najděte lokální extrémů funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})'$$

Použijeme pravidlo pro derivaci součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

pro  $u = x^2$  a  $v = e^{-x}$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y' = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x}$$

Dále použijeme derivaci mocninné funkce  $x^2$  a funkci  $e^{-x}$  derivujeme podle pravidla pro derivaci složené funkce.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2x - x^2) \end{aligned}$$

- Hledáme body s nulovou derivací:  $y' = 0$ .
- Abychom tuto rovnici snadno vyřešili, rozložíme na součin.
- Vytkneme opakující se výraz  $e^{-x}$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x) \end{aligned}$$

Kvadratický výraz v závorce je možno rozložit na součin vytknutím  $x$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

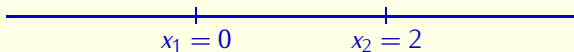
$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

Stacionární body:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .

- Nyní vidíme všechny stacionární body.
- Derivace je nula tehdy a jen tehdy, když alespoň jeden z výrazů v součinu je nulový.
- Výraz  $e^{-x}$  není roven nule nikdy.
- Výraz  $(x - 2)$  je roven nule pro  $x = 2$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

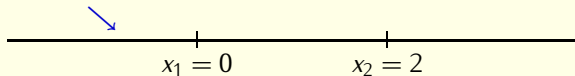
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ; \quad y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ; \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$



- Vyznačíme stacionární body na reálnou osu. Body nespojitosti derivace nemá
- Osa je rozdělena na tři podintervaly.
- Ve všech bodech jednoho každého podintervalu je stejný typ monotonie.

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ; \quad y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ; \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Zvolíme libovolného reprezentanta z prvního intervalu  $(-\infty, 0)$ .  
nechť tímto reprezentantem je číslo  $\xi_1 = -1$ . Vypočteme **derivaci** v  $\xi_1$ :

$$y'(-1) = e^{-(-1)}(-1)(2 - (-1)) = e^1(-1)3 < 0$$

Funkce je tedy klesající v bodě  $\xi_1$  a totéž platí pro všechny body intervalu  $(-\infty, 0)$ .

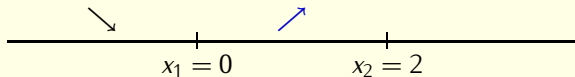


Najděte lokální extrémů funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Zvolíme reprezentanta  $\xi_2 = 1$  v intervalu  $(0, 2)$ . Derivace

$$y'(1) = e^{-1} 1(2 - 1) = e^{-1} > 0$$

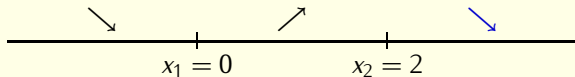
je v tomto bodě kladná a funkce roste v bodě  $\xi_2 = 1$  a i v celém intervalu  $(0, 2)$ .

Najděte lokální extrémů funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



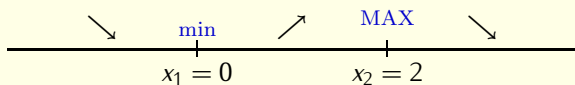
Zvolíme reprezentanta  $\xi_3 = 3$  v intervalu  $(2, \infty)$ . Derivace

$$y'(3) = e^{-3} 3(2 - 3) = -3e^{-3} < 0$$

je záporná a funkce klesá v bodě  $\xi_3 = 3$  a klesá i v celém intervalu  $(2, \infty)$ .

Najděte lokální extrémů funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ; \quad y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ; \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$



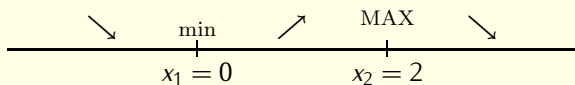
- Funkce je spojitá na  $\mathbb{R}$ .
- Ze schématu s monotonií plyne že funkce má lokální minimum v bodě  $x = 0$  a maximum v bodě  $x = 2$ .

Najděte lokální extrémy funkce  $y = x^2 e^{-x}$  a určete intervaly monotonie.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ;$$

$$y'(x) = e^{-x} x(2 - x) ;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$



- Vyřešeno!

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ . Určete též intervaly monotonosti.

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

- Určíme definiční obor.
- Omezení z logaritmické funkce je  $x > 0$ .
- Omezení ze jmenovatele zlomku je  $\ln x \neq 0$ . Protože  $\ln x = 0$  pro  $x = e^0 = 1$ , je toto ekvivalentní podmínce  $x \neq 1$ .
- Definiční obor je  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

Derivujeme pomocí vzorce pro derivaci podílu

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

kde  $u = x^2$  a  $v = \ln x$ .

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$$

Upravíme čitatele.



Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- Najdeme body kde platí  $y' = 0$ .
- Zlomek je roven nule, jestliže je jeho čitatel roven nule. Rozložíme tedy čitatel na součin vytknutím  $x$ .

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

- Nyní snadno najdeme stacionární body.
- Zlomek je nulový, jestliže některý z činitelů v čitateli je roven nule.

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Stacionární bod:  $x_1 = e^{1/2}$ .

- Činitel  $(2 \ln x - 1)$  je nula pro  $\ln x = \frac{1}{2}$ , tj. pro  $x = e^{1/2}$

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$Dom(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Stacionární bod:  $x_1 = e^{1/2}$ .

- Činitel  $x$  není na uvažovaném definičním oboru nikdy roven nule.
- Nedostáváme žádný další stacionární bod.

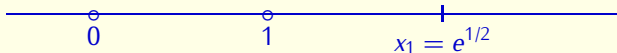
Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty) ; \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x} ; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

- K dalšímu výpočtu potřebujeme již jen derivaci a stacionární bod.
- Omezení na definiční obor derivace jsou stejná jako omezení pro původní funkci a derivace tedy existuje na celém definičním oboru funkce.

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

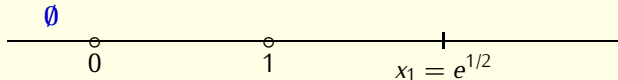
$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



- Vyznačíme definiční obor derivace (i s bodem nespojitosti) a stacionární bod na osu  $x$ .
- Protože  $1 = e^0$  a  $0 < 1/2$ , platí  $1 < e^{1/2}$ . (Exponenciální funkce je rostoucí).

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

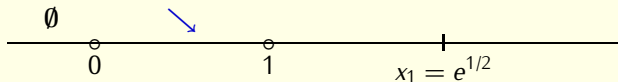
$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



- Osa  $x$  je nyní rozdělena na několik podintervalů. Levý z nich neleží v definičním oboru.
- Uvnitř každého z podintervalů, které náleží do definičního oboru, je zachován typ monotonie pro všechna  $x$ .

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

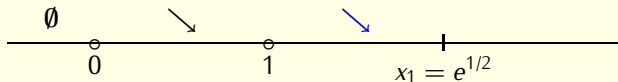


Bud'  $\xi_1 = e^{-1}$  reprezentant z prvního podintervalu. **Derivace** v bodě  $\xi_1$  je záporná, protože  $y'(-1) = \frac{e^{-1}(-2-1)}{(-1)^2} < 0$ , kde jsme použili  $\ln(e^{-1}) = -1$ . Funkce klesá v bodě  $\xi_1$  a totéž platí i na celém intervalu  $(0, 1)$ .



Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

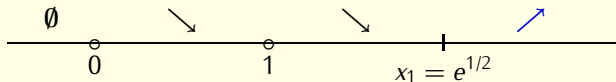


Bod  $\xi_2 = e^{1/4}$  splňuje  $1 < e^{1/4} < e^{1/2}$  a  $\ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}$ . Odsud

$$y'(e^{1/4}) = \frac{e^{1/4}(\frac{1}{2} - 1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} < 0.$$

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$

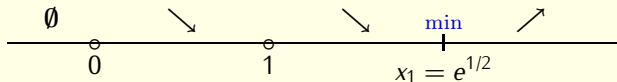


$\xi_3 = e$  splňuje  $1 < e$  a  $\ln(e) = 1$ . Odsud

$$y'(e) = \frac{e(2-1)}{1^2} > 0.$$

Určete lokální extrémy funkce  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ .

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty); \quad y' = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}; \quad x_1 = e^{1/2}.$$



Hotovo. Funkce má jediné lokální minimum v bodě  $x = e^{\frac{1}{2}}$  a nemá žádné lokální maximum.

KONEC