

LOKÁLNÍ EXTRÉM DVOU PROMĚNNÝCH – 1. PŘÍKLAD

$$f(x, y) = 3 - \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{2} - 2x$$

Potřebujeme sestavit matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & \frac{\partial z}{\partial x} = -2 \cdot \frac{x}{y} - 2 = -\frac{2x}{y} - 2 \\ 2 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{y} \\ 3 & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x}{y^2} \\ 4 & \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) - \frac{1}{2} \cdot 2y = \frac{x^2}{y^2} - y \\ 5 & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{y^3}\right) - 1 = -\frac{2x^2}{y^3} - 1 \\ 6 & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2x}{y^2} \text{ (kontrolní výpočet, musí se rovnat } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ – bod 3)} \end{array}$$

Soustava rovnic – nalezení podezřelého bodu

$$\begin{array}{ll} 7 & -2 \cdot \frac{2x}{y} - 2 = 0 \Rightarrow x = -y \\ 8 & \frac{x^2}{y^2} - y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} - y = \frac{(-y)^2}{y^2} - y \quad y = 1; \quad x = -1 \end{array}$$

Podezřelý bod má souřadnice $\left[-1; 1; \frac{7}{2}\right]$,

Poslední z-ovou souřadnici $\frac{7}{2}$ jsme získali tak, že jsme konkrétní hodnoty x a y dosadili do zadání.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{y} & \frac{2x}{y^2} \\ \frac{2x}{y^2} & -\frac{2x^2}{y^3} - 1 \end{pmatrix}$$

Nyní dosadíme $x = -1$ a $y = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot -3 - (-2) \cdot (-2) = 6 - 4 = 2 \det > 0 \Rightarrow \text{v bodě je extrém. O jeho kvalitě}$$

rozhodneme na základě velikosti $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, což je -2 tedy se jedná o maximum.

v bodě $\left[-1; 1; \frac{7}{2}\right]$ je ostré lokální maximum