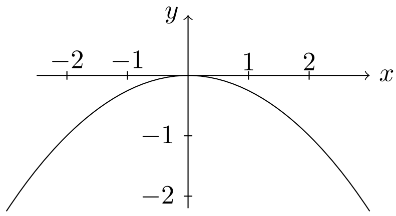
GLOBÁLNÍ EXTRÉMY – KONKRÉTNÍ PŘÍKLAD

Např. máme zadaný předpis funkce $y = \dfrac{-x^2}{4}$ a interval $x \in \langle -5; 3 \rangle$

(1) Tento předpis je tak jednoduchý, že není problém jej nakreslit okamžitě.

Obrázek 1. Průběh funkce $y = \dfrac{-x^2}{4}$



Hodnoty grafu zjistíme nalezením funkčních hodnot – zjistíme konkrétní souřadnice bodů. Dosazujeme libovolná čísla z definičního oboru za x a dopočítáváme hodnoty y.

Tabulka 1. Vybrané funkční hodnoty funkce $y = \dfrac{-x^2}{4}$

x	-5	-2	0	1	2	3	5
y	$-\frac{25}{4}$	-1	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{25}{4}$

Z obrázku je zřejmé, že nejnižším bodem této funkce na zadaném intervalu $x \in \langle -5; 3 \rangle$ je bod o souřadnicích $\left[-5; -\dfrac{25}{4}\right]$ a nejvyšší je v bodě $[0; 0]$, tedy

- maximum je v bodě $\left[-5; -\dfrac{25}{4}\right]$
- minimum je v bodě $[0; 0]$

(2) Ve zkouškových testech ale jak známo nejsou funkce tak jednoduché, abychom si je mohli takto nakreslit a proto musíme použít matematický aparát. V tomto případě příkladů se počítá ve dvou krocích. Počítají se *lokální* a *globální* extrémy. Budeme hledat extrémy na zadaném intervalu a následně budeme zjišťovat jejich kvalitu – zda se jedná o maximum či minimum. Tuto informaci můžeme zjistit 2 způsoby:

- průběhem funkce, když funkce kolem bodu
  - nejdříve klesá a potom roste, jedná se o MINIMUM
  - nejdříve roste a potom klesá, jedná se o MAXIMUM
- znaménkem 2. derivace, je-li:
  - kladné v daném bodě, jedná se o MINIMUM
  - záporné v daném bodě, jedná se o MAXIMUM

(a) Lokální extrémy

Spočteme první derivaci $y' = -\dfrac{1}{4} \cdot 2x = -\dfrac{x}{2}$

Z této derivace zjistíme nulové body

$-\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$ Jedná se o jediný bod o souřadnicích [0;0]

Kvalitu nyní zjistíme oběma možnými způsoby:

- Průběhem funkce. Spočteme monotonii funkce. Protože počítáme lokální extrémy, počítáme s ∞, nicméně v závěru se budeme soustředit pouze na zadaný interval.
  Na intervalu od $(-\infty; 0\rangle$ funkce $y = \dfrac{-x^2}{4}$ roste.
  Na intervalu od $\langle 0; \infty)$ funkce $y = \dfrac{-x^2}{4}$ klesá.
- Znaménko 2. derivace v daném bodě, spočteme tedy 2. derivaci
  $y'' = -\dfrac{1}{2}$ ani nemusíme nic dosazovat, vyšla hned záporná konstanta, záporné znaménko indikuje MAXIMUM.

(b) Hranice intervalu

pro spodní hranici $x = -5 \Rightarrow y = -\dfrac{25}{4}$

pro horní hranici $x = 3 \Rightarrow y = -\dfrac{9}{4}$

Porovnání funčních hodnot

Tabulka 2. Porovnání funkčních hodnot funkce $y = \frac{-x^2}{4}$

x	-5	0	3
y	$-\frac{25}{4}$	0	$-\frac{9}{4}$

A opět při použití různých postupů docházíme ke stejnému závěru, tedy že:

- maximum je v bodě $\left[-5; -\dfrac{25}{4}\right]$
- minimum je v bodě $[0; 0]$