KONVEXITA A KONKÁVITA (11. PŘÍKLAD)

$$y = \mathrm{e}^{-2x^2}$$

(1) Spočítáme definiční obor $x \in \mathbb{R}$

(2) Spočítáme první derivaci a upravíme

$$y' = \mathrm{e}^{-2x^2}(-4x) = -4x \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}$$

(3) Spočítáme druhou derivaci a upravíme

$$y'' = -4 \cdot \mathrm{e}^{-2x^2} + (-4x) \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}(-4x) = (\text{vytýkáme}\ldots) = -4\,\mathrm{e}^{-2x^2}(-1 + 4x^2)$$

(4) Položíme druhou derivaci rovnu nule a spočítáme nulové body

$$\begin{aligned} -4\,\mathrm{e}^{-2x^2}(-1 + 4x^2) &= 0 \\ -1 + 4x^2 &= 0 \\ 4x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{4} \\ x &= \pm\frac{1}{2} \text{ (máme 2 „podezřelé“ body)} \end{aligned}$$

(5) Tyto nulové body zaneseme na osu a budeme zjišťovat znaménka funkčních hodnot druhé derivace.

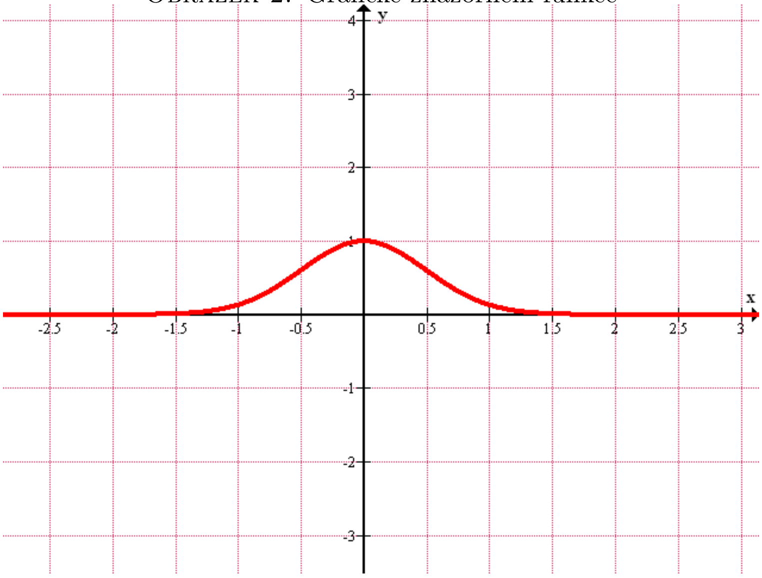
Obrázek 1. Číselná osa

Zdroj: program LaTeX

$$\text{Funkce je konvexní na intervalech } \underline{\underline{\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \text{ a } \left\langle +\frac{1}{2}; \infty\right)}}$$

$$\text{Funkce je konkávní na intervalu } \underline{\underline{\left\langle -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right\rangle}}$$

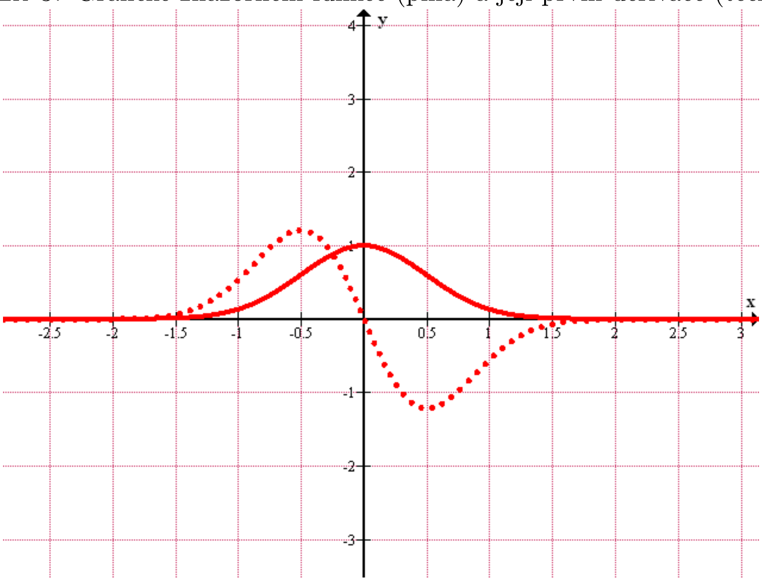
Obrázek 2. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

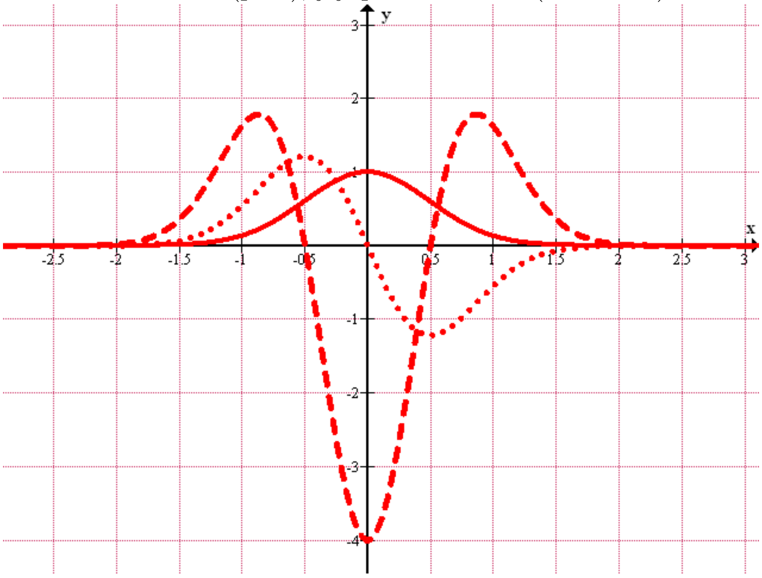
Obrázek 3. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

OBRÁZEK 4. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.