Konvexita, konkávita

KONVEXNÍ	+	$\smile$	Znaménko zjišťuji z druhé DERIVACE
KONKÁVNÍ	−	$\frown$	

$$f(x) = x^4 \cdot \left(\ln x - \frac{7}{12}\right)$$

I) DEFINIČNÍ OBOR! $x > 0$ podmínka ln. Ve výsledných intervalech se nemohou promítnout body, které neodpovídají definičnímu oboru.

II) $$f'(x) = 4x^3 \cdot \left(\ln x - \frac{7}{12}\right) + x^4 \cdot \left(\frac{1}{x} - 0\right) = \underline{4x^3\left(\ln x - \frac{7}{12}\right) + x^3}$$

III) $$\underline{f''(x)} = \underbrace{12x^2\left(\ln x - \frac{7}{12}\right) + 4x^3\left(\frac{1}{x} - 0\right)}_{\text{Derivace součinu}} + 3x^2 =$$

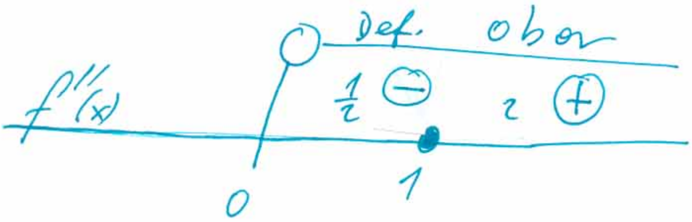
$$= 12x^2 \ln x - \cancel{12}x^2 \cdot \frac{7}{\cancel{12}} + \frac{4x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}} + 3x^2 = 12x^2 \ln x \underbrace{- 7x^2 + 4x^2 + 3x^2}_{0} =$$

$$= 12x^2 \ln x = \underbrace{12x^2}(\ln x)$$

toto je stále kladné pro kterékoli x. V tomto případě máme však omezený definiční obor a tak ne pro každé x dosazení do zadání má funkce smysl.

IV) Nulový bod − bod rovný nule v druhé derivaci: $12x^2 \ln x = 0$

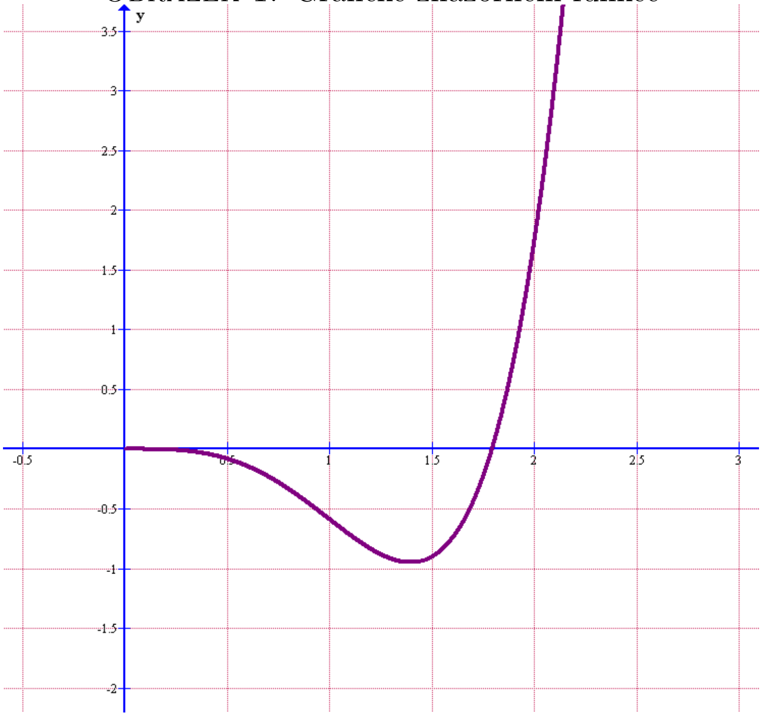
$$\ln x = 0$$
$$x = e^0$$
$$x = 1$$



Funkce s předpisem $f(x) = x^4\left(\ln x - \frac{7}{12}\right)$ je: konvexní na $\langle 1, \infty)$

konkávní na $(0, 1\rangle$

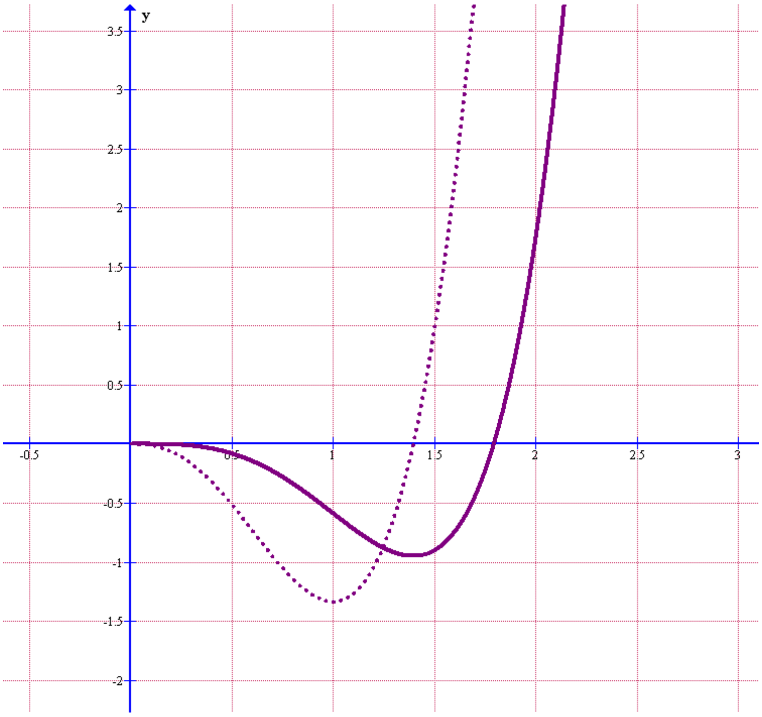
Obrázek 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

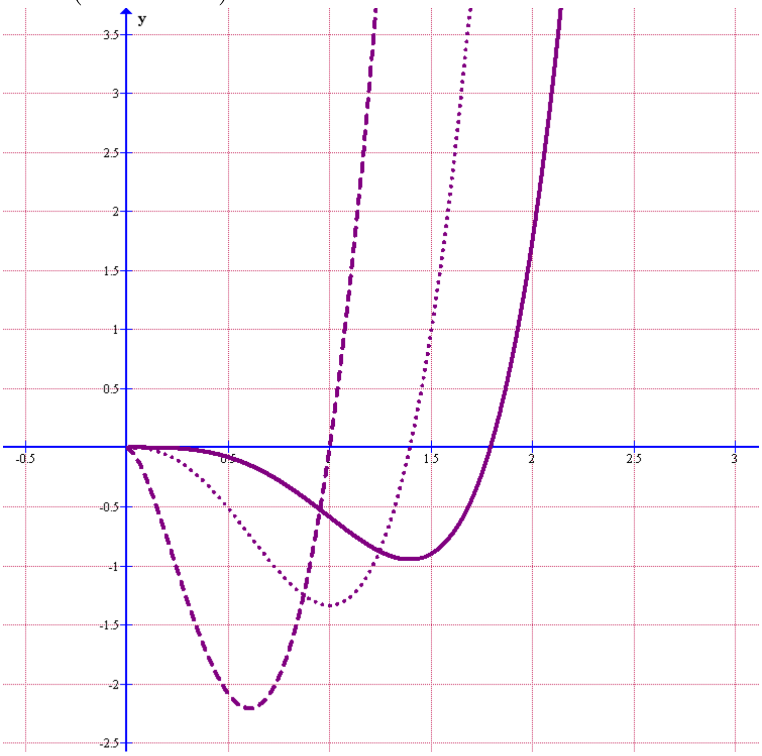
Obrázek 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

Obrázek 3. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.