Konvexita, konkávita $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

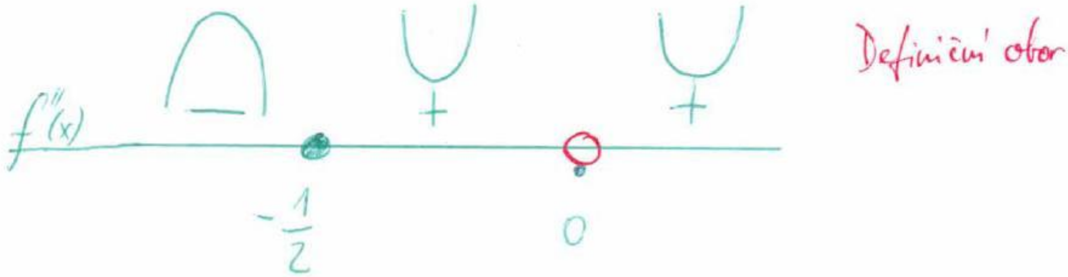
I) Definiční obor $\underline{x \neq 0}$ $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

II) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

III) $\underline{f''(x)} = +2x^{-3} \cdot e^{\frac{1}{x}} + (-x^{-2}) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

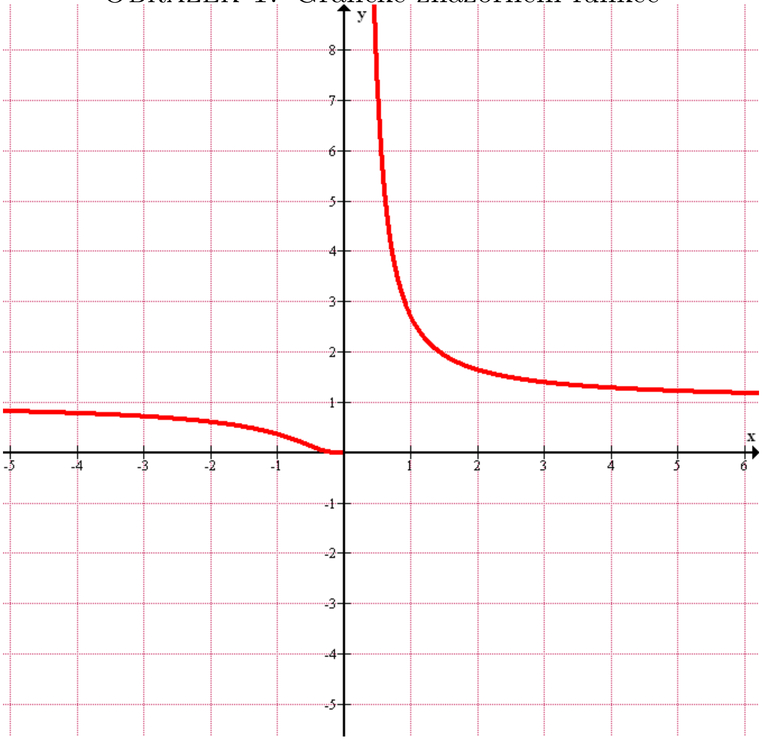
$$= 2\frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = \underline{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x+1}{x^4}\right)}$$

IV) Nulové body $\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{>0} \left(\frac{2x+1}{x^4}\right)$ — $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$



Funkce je konvexní na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a na $(0, \infty)$
konkávní na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$

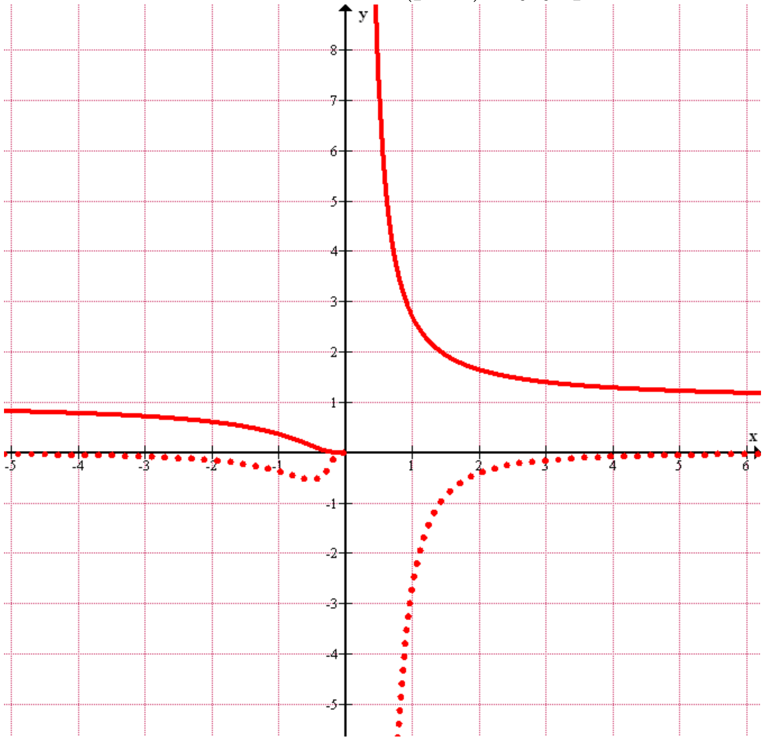
Obrázek 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

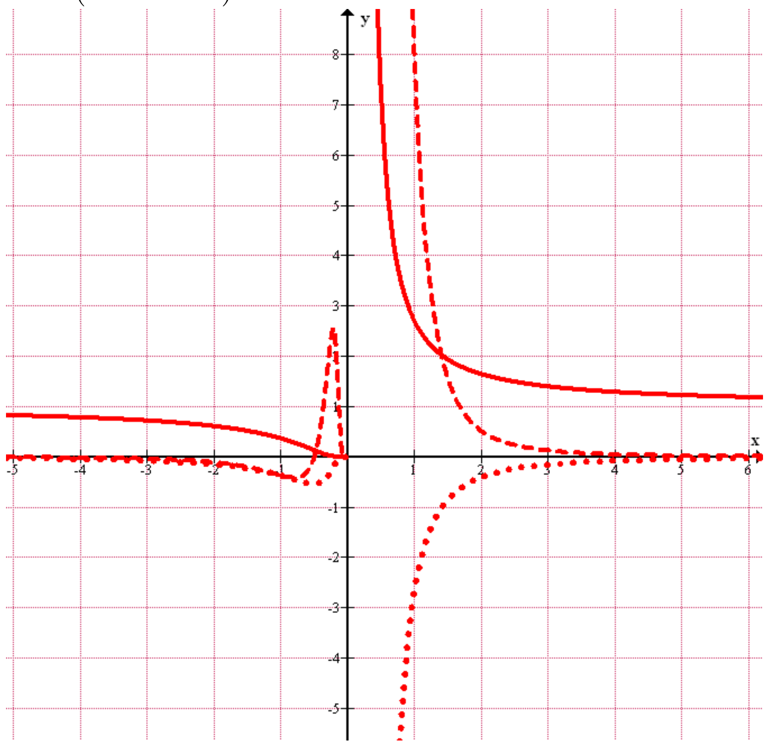
Obrázek 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

OBRÁZEK 3. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.