Konvexita, konkávita

$$f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$$

I) Def. obor $x \in \mathbb{R}$

II) $$f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \underline{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

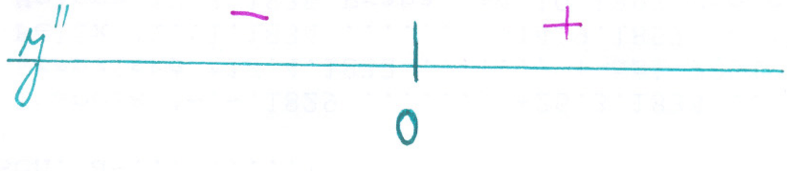
III) $$f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3} + 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

IV) Nulové body z druhé derivace:

existuje jen jeden, z čitatele $4x = 0$

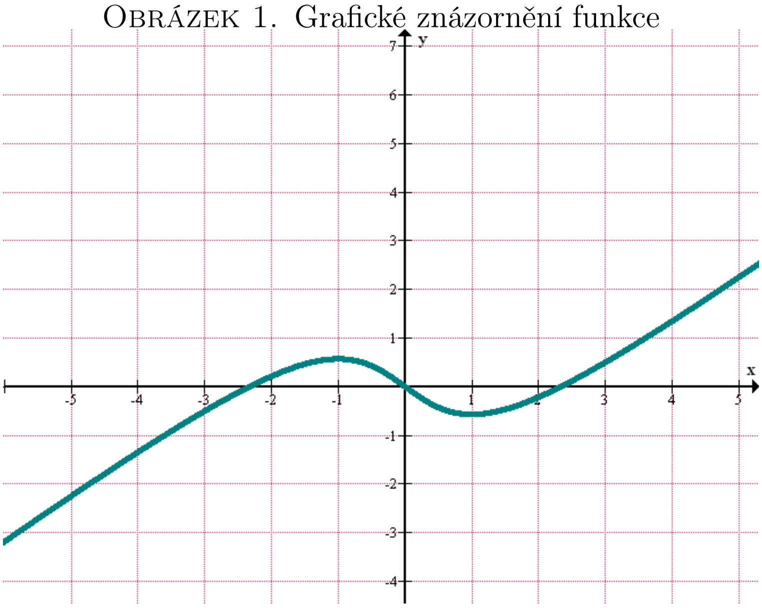
$x = 0$



Funkce je konvexní na $\langle 0; \infty)$

je konkávní na $(-\infty; 0\rangle$

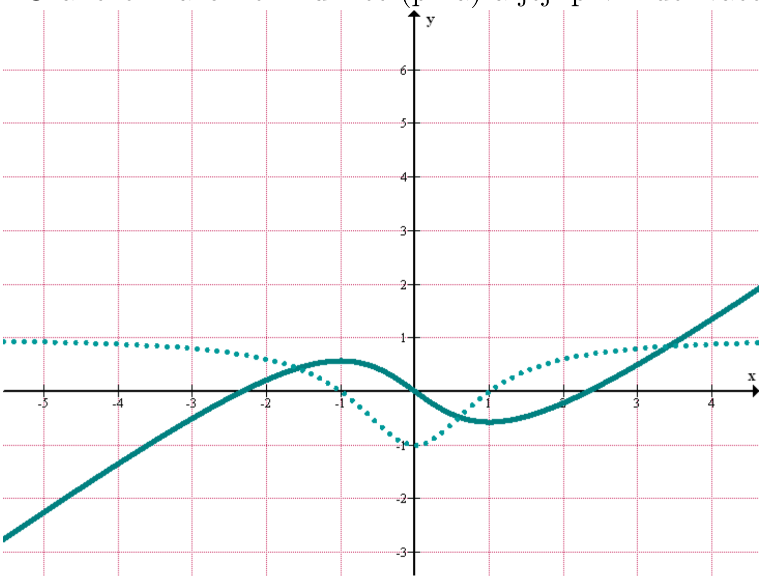
OBRÁZEK 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

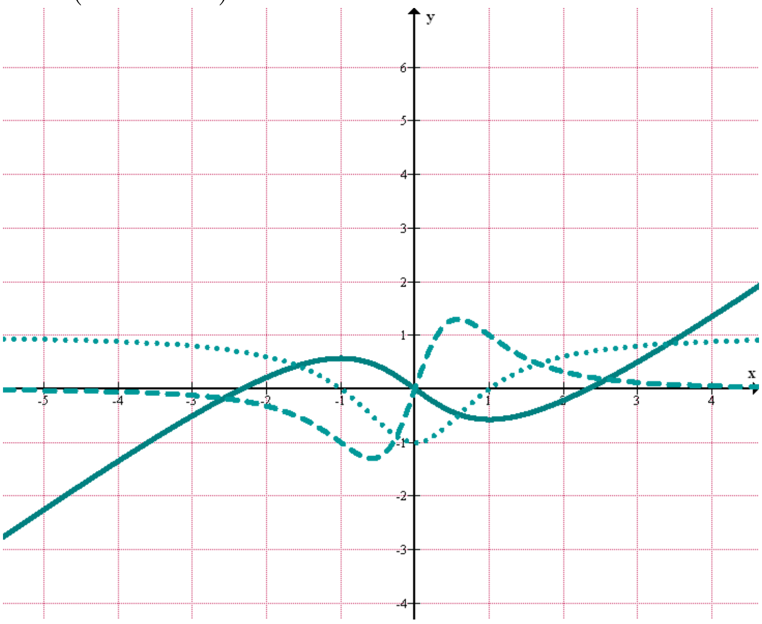
OBRÁZEK 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

Obrázek 3. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.