Konvexita a konkávita

$$f(x) = x + e^{1-x^2}$$

I) Definiční obor $x \in \mathbb{R}$

II) 1. derivace

$$f'(x) = 1 + e^{1-x^2} \cdot (-2x) = 1 - 2x \cdot e^{1-x^2}$$

III) 2. derivace

$$f''(x) = -2 \cdot e^{1-x^2} + \left[2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x)\right] = -2 \cdot e^{1-x^2} + 4x^2 \cdot e^{1-x^2} =$$

$$= 4x^2 \cdot e^{1-x^2} - 2e^{1-x^2} = \underline{2e^{1-x^2} \cdot (2x^2 - 1)}$$

IV) Nulové body z druhé derivace:

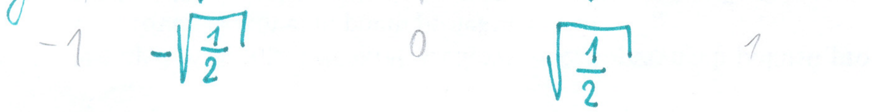
$$\underbrace{2e^{1-x^2}}_{>0} \cdot (2x^2 - 1) = 0$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ - 2 podezřelé body } = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq \pm 0{,}707$$

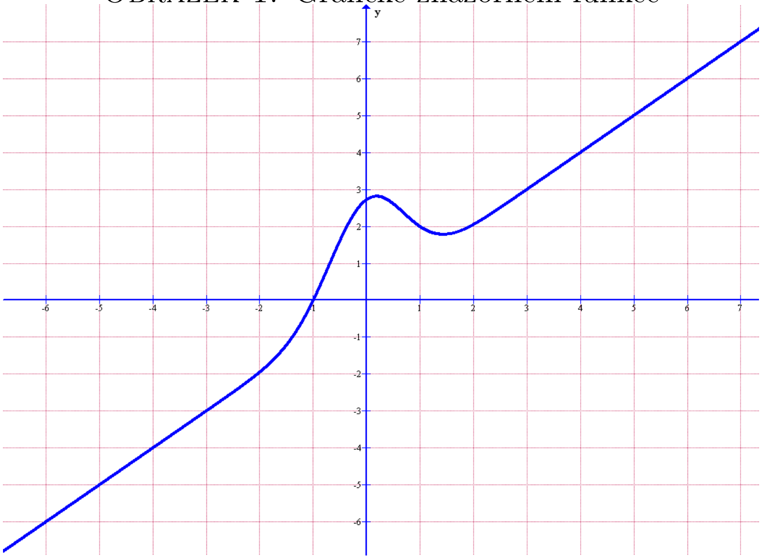


Funkce je konvexní na intervalu $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}\right\rangle$ a $\left\langle\sqrt{\frac{1}{2}}; \infty\right)$

konkávní na intervalu $\left\langle -\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}} \right\rangle$

+ funkce má 2 inflexní body

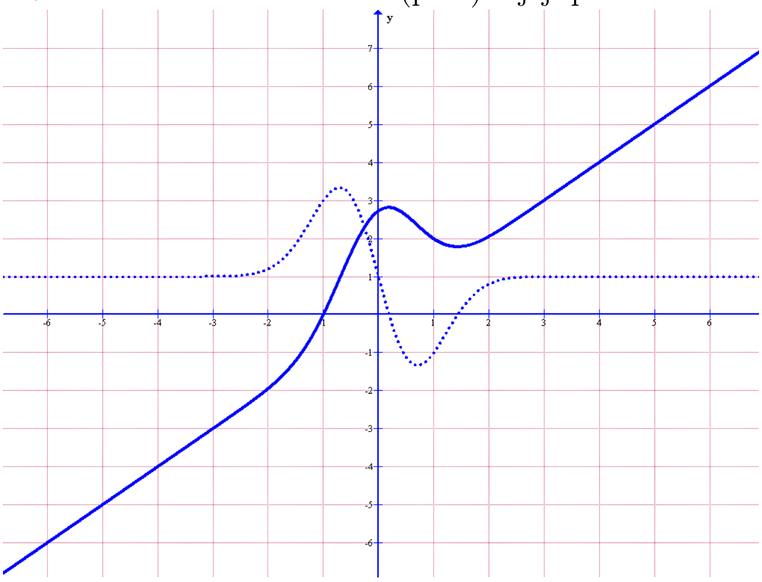
Obrázek 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

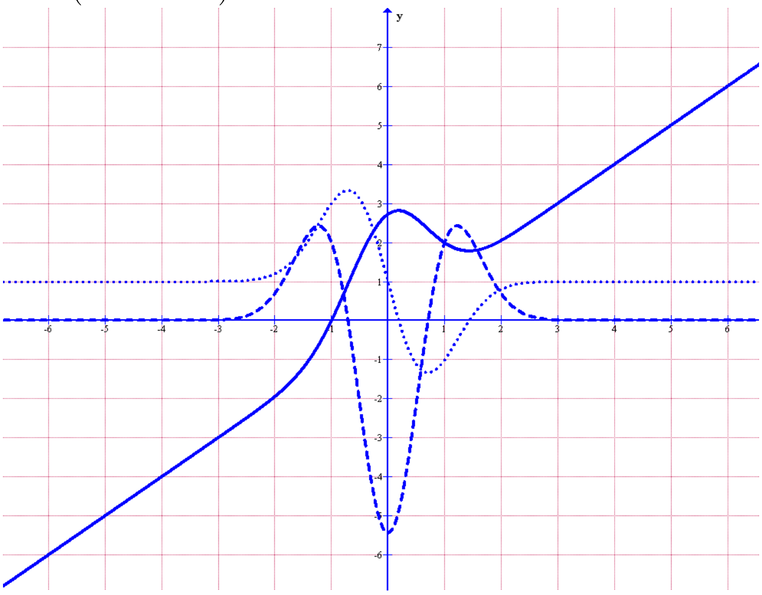
Obrázek 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

Obrázek 3. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.