Konvexita, konkávita

$$f(x) = x \cdot 2 \operatorname{arctg} x$$

I) Definiční obor

$x \in \mathbb{R}$

II) První derivace

$$f'(x) = 1 \cdot 2 \operatorname{arctg} x + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 1 =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$$

III) Druhá derivace

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 1 + \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)+2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2+2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4}{(1+x^2)^2} > 0 \text{ na } \mathbb{R}.$$

IV) Nulové body z druhé derivace (= podezřelé body. Body, kde je pravděpodobný inflexní bod. Hodnota tohoto bodu = 'iksová' souřadnice tohoto bodu)

z čitatele $4 = 0$

↳ z čitatele žádný nulový bod nevyplývá!

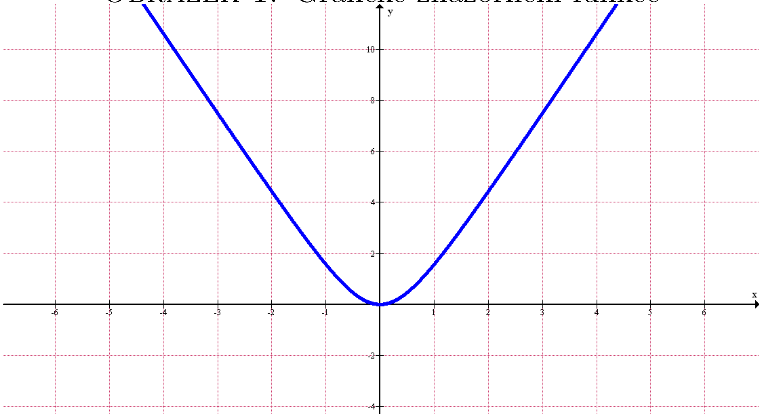
ze jmenovatele

$(1+x^2)^2 = 0$

↳ ani ze jmenovatele nevyplývají žádné n. body

Funkce $f(x) = x \cdot 2 \operatorname{arctg} x$ je **konvexní** na celém $\mathbb{R}$.

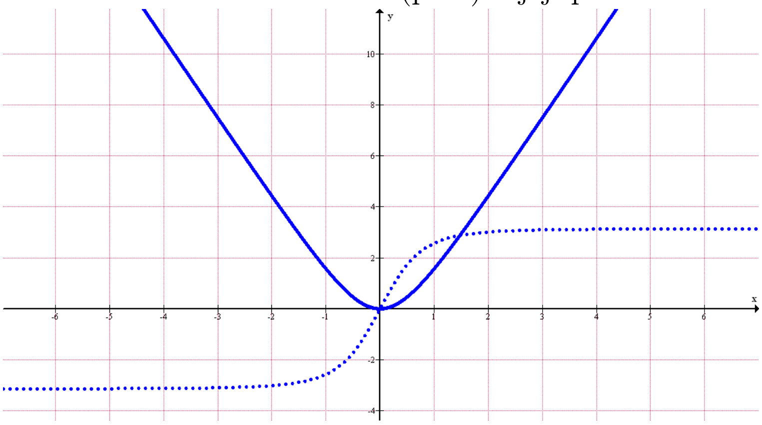
Obrázek 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

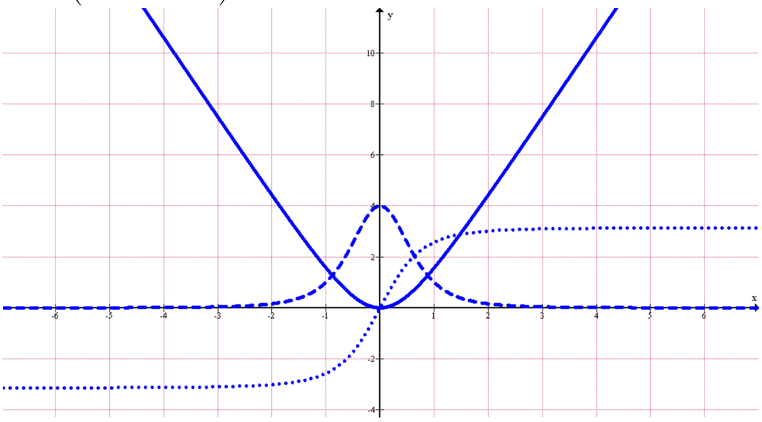
Obrázek 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

Obrázek 3. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.