TAYLORŮV POLYNOM 3. STUPNĚ (2. PŘÍKLAD)

$$y = (x-1)\cdot \ln x + 1, \qquad \text{bod } a = 1$$

Pohybujeme se v prostoru s jednou proměnnou – máme proměnnou volitelnou a závislou a tedy každý bod má dvě souřadnice, x a y (někdy též značená $f(x)$). My známe pouze souřadnici x bodu a, nicméně počítáme Taylorův polynom a vzoreček pro něj, který je uveden dole, říká, že budeme na konci potřebovat obě. Nejprve tedy spočítáme druhou souřadnici zadaného bodu a. Tuto souřadnici zjistíme dosazením známé souřadnice do zadáné funkce.

Dopočítání druhé souřadnice

$y_0 = (1-1)\cdot \ln 1 + 1 = \underline{\underline{1}}$

NÁHODOU! vyšly obě souřadnice stejné. Počítáme tedy Taylorův polynom 3. stupně pro bod $[1; 1]$. Do vzorečku dosazujeme obě hodnoty, $[x_0; y_0]$.

1. derivace

$y' = (1-0)\cdot \ln x + (x-1)\cdot \dfrac{1}{x} + 0 = \underline{\underline{\ln x + \dfrac{x-1}{x}}}$

1. derivace v bodě x

$y'_{(a)} = \ln 1 + \dfrac{1-1}{1} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

2. derivace

$y'' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{(1-0)\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-x+1}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{x+1}{x^2}}}$

2. derivace v bodě x

$y''_{(a)} = \dfrac{1+1}{1^2} = \dfrac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$

3. derivace

$y''' = \dfrac{(1+0)\cdot x^2 - (x+1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \dfrac{-x^2-2x}{x^4} = \dfrac{x\cdot(-x-2)}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{-x-2}{x^3}}}$

3. derivace v bodě x

$y'''_{(a)} = \dfrac{-1-2}{1^3} = \dfrac{-3}{1} = \underline{\underline{-3}}$

Tabulka 1. Mezivýpočty pro dosazení do vzorce Taylorova polynomu

Stupeň derivace	**Derivace v bodě**	**Koeficienty Taylorova polynomu**
1.	0	$\frac{0}{1!} = \underline{\underline{0}}$
2.	2	$\frac{2}{2!} = \underline{\underline{1}}$
3.	-3	$\frac{-3}{3!} = \frac{-3}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

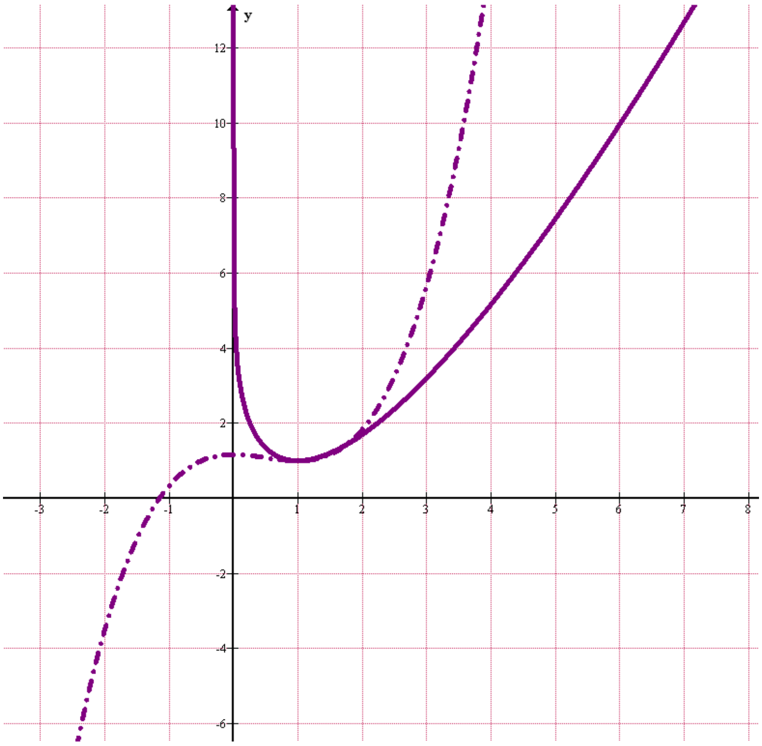
$$\underline{\underline{T_3 = 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)^3}}$$

Vzorec Taylorova polynomu n-tého řádu obecně

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Za samotné x se v tomto vzorečku NIC nedosazuje. Pouze se do výsledku opisuje (podobně jako u výpočtu tečen a normál). Kdybychom dosazovali jak za x tak za x_0, tak by bylo výsledkem jedno číslo. Taylorův polynom je ale nová funkce, ve které se samozřejmě musí objevit proměnná.

Obrázek 1. Průběh funkce $y = (x-1) \cdot \ln x + 1$ (plná čára) a Taylorův polynom 3. stupně v bodě a (čárkovaná)



Zdroj: program Graph